向量组的秩与矩阵秩：

$$A=(a_{ij})_{m\times n} \qquad \operatorname{rank}(A) \rightsquigarrow A\text{的秩}$$

$$=\begin{pmatrix}\vec{a}_1\\ \vdots \\ \vec{a}_m\end{pmatrix} \qquad \operatorname{rank}(\vec{a}_1,\cdots,\vec{a}_m) \rightsquigarrow A\text{的行秩}$$

$$=(\vec{b}_1,\cdots,\vec{b}_n) \qquad \operatorname{rank}(\vec{b}_1,\cdots\vec{b}_n) \longrightarrow A\text{的列秩}$$

定理： 秩 = 行秩 = 列秩.

证：初等变换不改变三者！直接验证定理对相抵标准形成立.

推论： $A\in F^{n\times n}$.

(1) A可逆 $\Leftrightarrow$ $\operatorname{rank}(A)=n$ $\Leftrightarrow$ 行向量线性无关 $\Leftrightarrow$ 列向量线性无关

(2) $\operatorname{rank}(A)=r$ $\Rightarrow$ 不为零的 r 阶子式所在行(列)构成 A 的行(列)向量的极大无关组.

例： $A\in F^{m\times n}$, $B\in F^{n\times p}$.

$$\operatorname{rank}(AB)\le \min\big(\operatorname{rank}(A),\operatorname{rank}(B)\big)$$

证：$(\vec{c}_1,\cdots,\vec{c}_p)=AB=(\vec{a}_1,\cdots,\vec{a}_n)B \Rightarrow \operatorname{rank}(AB)\le\operatorname{rank}(A)$

$$\begin{pmatrix}\vec{c}_1{}'\\ \vdots\\ \vec{c}_m{}'\end{pmatrix}=AB=A\begin{pmatrix}\vec{b}_1\\ \vdots\\ \vec{b}_n\end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{rank}(AB)\le\operatorname{rank}(B) \quad \square$$

§3.4 基与维数

定理：F^n 的每个子空间都可以由一组向量生成.

证：假设结论对某个子空间 $V\subseteq F^n$ 不成立. 则 $V\neq 0$.

$\Rightarrow \exists \vec{a_1}\in V\setminus\{0\}$. 记 $V_1=\langle\vec{a_1}\rangle$. 则 $V_1\subsetneq V$.

$\Rightarrow \exists \vec{a_2}\in V\setminus V_1$ 记 $V_2=\langle\vec{a_1},\vec{a_2}\rangle$. 则 $V_2\subsetneq V$

$\Rightarrow \exists \vec{a_3}\in V\setminus V_2$ 记 $V_3=\langle\vec{a_1},\vec{a_2},\vec{a_3}\rangle$ 则 $V_3\subsetneq V$

$\vdots$

递归地我们可以构造无穷序列：$\vec{a_1},\vec{a_2},\vec{a_3},\cdots$

习题 15 $\Rightarrow \forall r\geq 1$, $\vec{a_1},\cdots,\vec{a_r}$ 线性无关.

$\Rightarrow$ 矛盾.（$\forall$ $n+1$ 个向量线性相关）

注：定理 $\Rightarrow \exists\vec{a_1},\cdots,\vec{a_r}$ s.t. 1) $V=\langle\vec{a_1},\cdots,\vec{a_r}\rangle$

2) 线性无关 $\Rightarrow$ 基

定义：$V\subseteq F^n$ 子空间，V 中的一组向量 $\{\vec{a_1},\cdots,\vec{a_r}\}$ 称为 V 的一组基，若

(1) $V=\langle\vec{a_1},\cdots,\vec{a_r}\rangle$ 即 $\forall\vec{a}\in V$ $\underbrace{\exists\lambda_1\cdots\lambda_r}^{\text{唯一性}}$ s.t. $\vec{a}=\sum\lambda_i\vec{a_i}$

(2) $\vec{a_1},\cdots,\vec{a_r}$ 线性无关.

称 $(\lambda_1,\cdots,\lambda_r)$ 为 $\vec{a}$ 在 $\{\vec{a_1},\cdots,\vec{a_r}\}$ 下的坐标.

② 称 V 的一组基中的向量的个数为 V 的维数

例(自然基): $\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n$ 为 F^n 的一组基

空间 $\xrightarrow[1:1]{\text{坐标系}} \mathbb{R}^3$ $\Longrightarrow$ $V \xrightarrow[1:1]{\text{基}} \mathbb{F}^r$ ← V的维数

点 $\longmapsto (x,y,z)$ $\qquad$ $a \longmapsto (\lambda_1,\cdots,\lambda_r)$

设 $v \in V$ 在 $\{\vec{a}_1, \cdots \vec{a}_r\}$ 下的坐标为 $(x_1,\cdots,x_r)$

在 $\{\vec{b}_1, \cdots, \vec{b}_r\}$ 下的坐标为 $(y_1 \cdots y_r)$, 即

$$v = (\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_r)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} = (\vec{b}_1 \cdots \vec{b}_r)\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_r \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_r \end{pmatrix}$ 之间的关系?

V的两组基

$$(\vec{b}_1, \cdots, \vec{b}_r) = (\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_r)T$$

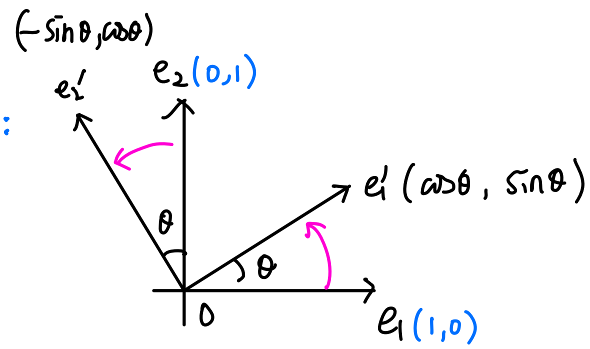
从 $\{\vec{a}_1,\cdots,\vec{a}_r\}$ 到 $\{\vec{b}_1 \cdots \vec{b}_r\}$ 的过渡矩阵

$$v = (\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_r)\boxed{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix}} = (\vec{b}_1 \cdots \vec{b}_r)\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_r \end{pmatrix} = (\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_r)\boxed{T\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_r \end{pmatrix}}$$

坐标唯一 $\Rightarrow$ 坐标变换公式 $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_r \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_r \end{pmatrix} = T^{-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix}$$

例：



$$\Rightarrow (e_1', e_2') = (e_1, e_2)\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

任意线性无关组可扩充为一组基.

定理：$V \subseteq F^n$ 为 r 维子空间. $\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_s \in V\ (s<r)$ 线性无关，则 $\exists\ \vec{a}_{s+1}, \cdots, \vec{a}_r \in V$ s.t. $\underbrace{\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_r}$ 构成 V 的一组基.

$\hookrightarrow$ $\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_s$ 的一组扩充基

维数与基的基本性质.

定理：$U, V \subseteq F^n$ 子空间. 则

(1) $\dim V = r \Rightarrow V$ 中任意 $r+1$ 个向量线性相关

(2) $\dim V = r$, $\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_r \in V$ 线性无关 $\Rightarrow \{\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_r\}$ 为 V 的一组基.

(3) $U \subseteq V \Rightarrow \dim U \leq \dim V$

(4) $U \subseteq V$ & $\dim U = \dim V \Rightarrow U = V$

④ 证：✓

例: $V := \{(x_1,x_2,x_3) \mid x_1+x_2+x_3=0\} \subseteq \mathbb{R}^3$

子空间?, 基? 维数?

$$\forall \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in V \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

例 $W := \{(x_1,x_2,x_3) \mid x_1+x_2+x_3=0,\ 2x_1-x_2+x_3=3\} \subseteq \mathbb{R}^3$

不是子空间! $0 \notin W$.

$$V = \{X \in F^n \mid AX = 0\} \text{ 子空间}$$

$$W = \{X \in F^n \mid AX = \underset{\neq 0}{b}\} \text{ 不是子空间}$$